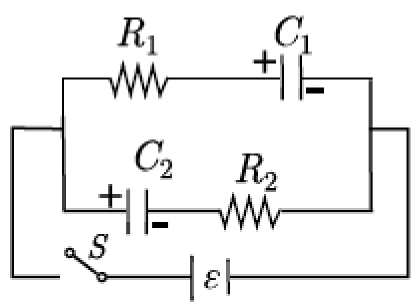
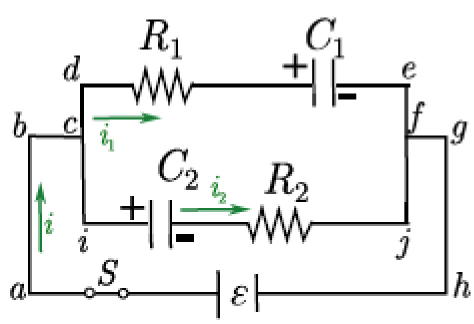
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 14

Problema 1. En $t = 0$ el interruptor del circuito mostrado abajo se cierra. Obtenga las cargas en los capacitores, y las corrientes que fluyen por las resistencias si los condensadores inicialmente estaban descargados.



El circuito se puede ver como



La ley de las mallas aplicada a la malla $abcdefgh$ obtenemos:

$$\varepsilon - I_1 R_1 - \frac{q_1}{C_1} = 0$$

La ley de las mallas aplicada a la malla $abcijfgh$ obtenemos:

$$\varepsilon - I_2 R_2 - \frac{q_2}{C_2} = 0$$

Usando definición de corriente eléctrica

$$\varepsilon - \frac{dq_1}{dt} R_1 - \frac{q_1}{C_1} = 0$$

$$\varepsilon - \frac{dq_2}{dt} R_2 - \frac{q_2}{C_2} = 0$$

Dividimos la ecuación (1) por R_1 y la ecuación (2) por R_2 y reordenamos

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{R_1 C_1} - \frac{\varepsilon}{R_1} = 0$$

$$\frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{R_2 C_2} - \frac{\varepsilon}{R_2} = 0$$

Multiplicamos y dividimos el último término de cada ecuación por C_1 y C_2 y agrupamos

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1 - C_1 \varepsilon}{R_1 C_1} = 0$$

$$\frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2 - C_2 \varepsilon}{R_2 C_2} = 0$$

La solución de una será idéntica a la de la otra. Resolvemos una ecuación por separación de variables

$$\frac{dq_1}{q_1 - C_1 \varepsilon} = -\frac{dt}{R_1 C_1}$$

Integramos (A constante de integración)

$$\ln(q_1 - C_1 \varepsilon) = -\frac{t}{R_1 C_1} + A$$

Tomamos la exponencial ($B = e^A$)

$$q_1 - C_1 \varepsilon = B e^{-t/R_1 C_1}$$

Entonces

$$q_{1_{(t)}} = B e^{-t/R_1 C_1} + C_1 \varepsilon$$

Por condiciones iniciales

$$q_{1_{(0)}} = B + C_1 \varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -C_1 \varepsilon$$

Finalmente

$$q_{1_{(t)}} = -C_1 \varepsilon e^{-t/R_1 C_1} + C_1 \varepsilon$$

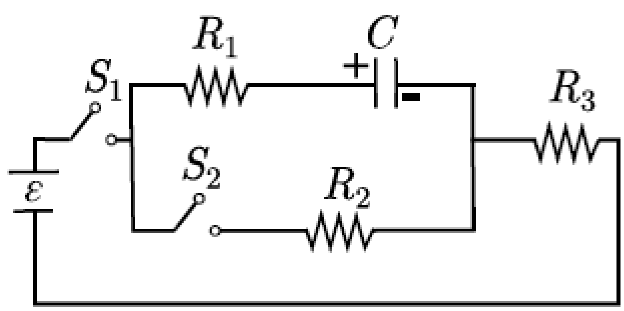
$$q_{2(t)} = -C_2 \varepsilon e^{-t/R_2C_2} + C_2\varepsilon$$

Derivando para obtener las corrientes

$$I_{1(t)} = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-t/R_1C_1}$$

$$I_{2(t)} = \frac{\varepsilon}{R_2} e^{-t/R_2C_2}$$

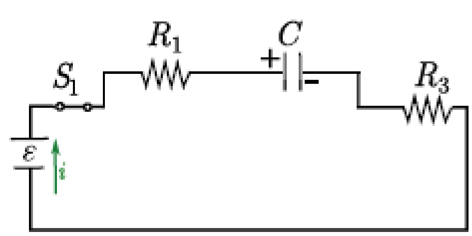
Problema 2. Considere el sistema de la figura. En el instante $t < 0$, los interruptores están abiertos y el condensador se encuentra descargado. En el instante $t = 0$, se cierra S1, quedando S2 abierto. Luego, en un instante $t = t_0$, se cierra S2, por lo que para un tiempo $t > t_0$ ambos interruptores están cerrados.



(a) Encuentre la corriente a través de la batería en un instante $0 < t < t_0$.

(b) Considerando que $q_{(t=t_0)} = q_0$ (antes de cerrar el interruptor S2), determine la corriente a través de la batería en un instante $t = t_0$ (instantáneamente después de cerrar el interruptor S2).

(a) Aplicaremos las leyes de Kirchhoff tal cual las hemos aplicado hasta ahora. Llamaremos camino γ_1 al camino que parte desde la esquina inferior izquierda, pasa por la resistencia R_1, luego por el condensador, por la resistencia R_3 y vuelve al punto de inicio, y el camino γ_2 tiene el mismo inicio, pasa por la resistencia R_2, luego por la resistencia R_3 y vuelve al punto de inicio. De esta forma:



La ley de mallas

$$\varepsilon - IR_1 - \frac{q}{C} - IR_3 = 0$$

Usando el mismo arreglo algebraico que en el problema anterior

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q - C\varepsilon}{(R_1 + R_3)C} = 0$$

Al igual que en el problema anterior, separamos variables, integramos, tomamos la exponencial y despejamos q

$$q_{(t)} = Be^{-t/(R_1+R_3)C} + C\varepsilon$$

Tenemos como condición inicial que el condensador estaba descargado ($q_{(0)} = 0$)

$$q_{(0)} = B + C\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -C\varepsilon$$

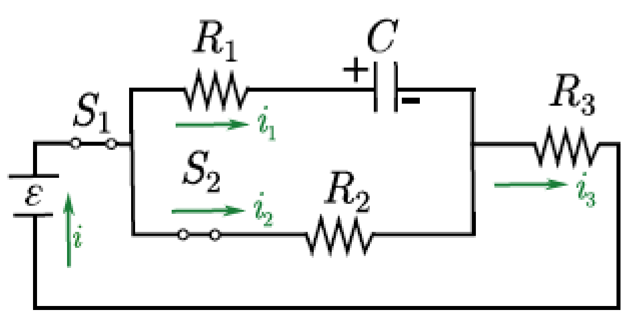
Luego

$$q_{(t)} = -C\varepsilon e^{-t/(R_1+R_3)C} + C\varepsilon$$

Derivamos para obtener la corriente

$$I_{(t)} = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3} e^{-t/(R_1+R_3)C} \qquad 0 < t < t_0$$

(b) Justo después de cerrar el interruptor S2 el circuito se ve así



Utilizando la primera ley de Kirchhoff podemos ver que $I = I_1 + I_2 = I_3$, así, el problema se reduce a calcular la intensidad I_3 (que pasa por la batería), como si recién hubiésemos conectado el condensador. Por lo mismo, necesitamos conocer la carga final del condensador primero, antes de cerrar el interruptor S2. Esta la obtenemos al evaluar la expresión que obtuvimos en (a) para la carga, en $t = t_0$, sin embargo, nos dicen que $q_{(t=t_0)} = q_0$.

Aplicando la primera Ley de Kirchhoff en los caminos γ_1 y γ_2 obtenemos que, en el tiempo t_0:

$$\varepsilon - I_1R_1 - \frac{q_0}{C} - I_3R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{1}{R_1}\left(\varepsilon - \frac{q_0}{C} - I_3R_3\right)$$

$$\varepsilon - I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{1}{R_2}(\varepsilon - I_3 R_3)$$

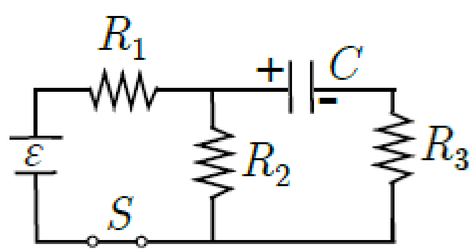
Finalmente reemplazamos esas dos corrientes en I_3

$$I = I_3 = I_1 + I_2 = \frac{1}{R_1}\left(\varepsilon - \frac{q_0}{C} - I_3 R_3\right) + \frac{1}{R_2}(\varepsilon - I_3 R_3)$$

Despejamos I_3

$$I_{3(t_0)} = \frac{\varepsilon\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{q_0}{C}\right)}{1 + R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

Problema 3. En el circuito de la figura, el interruptor se encuentra cerrado y el condensador está cargado completamente. Determine la corriente en cada resistencia y la carga en el condensador. En $t = 0$ se abre el interruptor S. Encuentre la corriente que pasa por la resistencia R2 como función del tiempo. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la carga en C disminuya hasta $4/5$ del valor en $t = 0$?



Como el condensador está inicialmente cargado, ya no puede circular más corriente por el (que sería el equivalente a cargarlo), por lo que $I_3 = 0$

Entonces el circuito se reduce a dos resistencias en serie y una batería.

Por ecuación de malla tenemos que la carga que circula por R_1 y R_2 es:

$$\varepsilon - I_1 R_1 - I_1 R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

Para encontrar la carga en el condensador usamos de nuevo la ecuación de malla, pero esta vez a la que incluye al capacitor, recordando que $I_3 = 0$

$$\varepsilon - I_1 R_1 - \frac{q}{C} - I_3 R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = C(\varepsilon - I_1 R_1)$$

Cuando se abre S ya no circula corriente por R_1, y el circuito a considerar es el capacitor y las resistencias R_2 y R_3. Entonces usamos ecuación de malla

$$-\frac{q}{C} - I_4 R_3 - I_4 R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_4(R_3 + R_2) + \frac{q}{C} = 0$$

Obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(R_3 + R_2)} = 0$$

La resolvemos por separación

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{C(R_3 + R_2)}$$

Integramos (A cosntante de integración)

$$\ln(q) = -\frac{t}{C(R_3 + R_2)} + A$$

Tomamos la exponencial

$$q_{(t)} = Ae^{-t/C(R_3+R_2)}$$

Para encontrar la constante A usamos condiciones iniciales (la carga en $t = 0$ es $q_{(0)} = C(\varepsilon - I_1 R_1)$)

$$q_{(0)} = Ae^0 = C(\varepsilon - I_1 R_1) \quad \Rightarrow \quad A = C(\varepsilon - I_1 R_1)$$

Por lo que obtenemos

$$q_{(t)} = C(\varepsilon - I_1 R_1)e^{-t/C(R_3+R_2)}$$

Para obtener la corriente en el tiempo derivamos

$$I_{(t)} = -\frac{\varepsilon - I_1 R_1}{R_3 + R_2} e^{-t/C(R_3+R_2)}$$

Note que el signo menos en la corriente indica que el condensador se está descargando.

Para encontrar cuanto tiempo tiene que pasar para que la carga en el condensador sea $4/5$ de su carga total usamos la solución de la carga en función del tiempo igualándola a $4C(\varepsilon - I_1 R_1)/5$ y despejando t.

$$q_{(t)} = C(\varepsilon - I_1 R_1)e^{-t/C(R_3+R_2)} = \frac{4C(\varepsilon - I_1 R_1)}{5}$$

Simplificamos y despejamos t

$$e^{-t/C(R_3+R_2)} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad -\frac{t}{C(R_3 + R_2)} = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad t = C(R_3 + R_2)\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$